

São Paulo, 25 de março de 2025

# Enzo, só lhe peço perdão...

*Equações Diferenciais Estocásticas e o Cálculo de Itô:*

*Uma Introdução Conceitual ao Meu Filhote Enzo*

Enzo,

*A matemática é, em essência, a arte de descrever padrões.*

*Quando os padrões envolvem mudanças ao longo do tempo ou de alguma outra variável, entramos no domínio das equações diferenciais. Você pode pensar nelas como regras que governam como uma quantidade varia, em vez de simplesmente dizer quanto ela vale.*

*Uma equação diferencial é uma equação onde a incógnita não é apenas um número, mas uma função. E essa função aparece juntamente com sua(s) taxa(s) de variação.*

*Ou seja, não buscamos simplesmente o valor da função em um ponto, mas qual é a função inteira que satisfaz certa relação envolvendo suas próprias mudanças.*

*Por exemplo, suponha que a velocidade de crescimento de uma população dependa da quantidade atual de indivíduos. Isso não nos dá diretamente o número de indivíduos no tempo  $t$ , mas nos dá uma regra sobre como esse número muda com o tempo.*

*Essas equações surgem naturalmente em quase todas as áreas que envolvem sistemas que evoluem. Isso inclui:*

*Física (movimento, calor, ondas, eletricidade)*

*Biologia (crescimento de populações, epidemiologia)*

*Economia (variação de preços, dinâmica de mercados)*

*Engenharia (controle, circuitos, sistemas dinâmicos)*

Química (reações, difusão)

E até filosofia natural e sociologia quantitativa, em modelos mais recentes.

Elas são a ferramenta matemática fundamental para descrever dinâmica contínua: sistemas em que os estados mudam gradualmente no tempo ou no espaço.

Resolver uma equação diferencial significa encontrar todas as funções que satisfazem a regra dada. Essas funções são chamadas de soluções.

Em muitos casos, há uma família infinita de soluções possíveis. Para selecionar uma única, impomos condições iniciais ou condições de contorno. Essas informações adicionais definem o estado do sistema num certo instante (ou local), e a partir daí, o comportamento futuro fica determinado. As equações diferenciais podem ser classificadas de várias maneiras. Aqui estão as principais:

### Ordem

A ordem indica quantas vezes a função está sendo diferenciada.

Primeira ordem: envolve apenas a taxa de variação simples (como velocidade).

Segunda ordem: envolve a variação da variação (como aceleração).

E assim por diante.

### Ordinária vs. Parcial

Ordinárias: a função depende de uma só variável independente (geralmente o tempo). Exemplo: trajetória de um projétil.

Parciais: a função depende de várias variáveis independentes (como tempo e espaço). Exemplo: temperatura em um corpo ao longo do tempo e em diferentes posições.

## *Linear vs. Não linear*

*Linear: a função e suas derivadas aparecem de forma linear (sem produtos, potências, etc.).*

*Não linear: envolve interações mais complexas entre a função e suas derivadas. Esses casos são muito mais difíceis e, em geral, exigem métodos numéricos ou qualitativos.*

*d) Autônoma vs. Não autônoma. Autônoma: as regras de variação não mudam com o tempo. O sistema se comporta da mesma forma independentemente de quando é observado.*

*Não autônoma: há dependência explícita do tempo ou de outra variável independente.*

*Vamos pensar em alguns exemplos clássicos para entender o significado das equações diferenciais no mundo real:*

### *Movimento de um corpo*

*A segunda lei de Newton afirma que a força é igual à massa vezes a aceleração. A aceleração é a segunda derivada da posição em relação ao tempo. Ou seja, o movimento de um corpo sob força pode ser descrito por uma equação diferencial de segunda ordem.*

### *Resfriamento de um objeto*

*A taxa de variação da temperatura de um objeto é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do ambiente. Essa é uma equação de primeira ordem, muito usada em engenharia térmica.*

### *Crescimento populacional*

*Se o crescimento é proporcional à população atual, temos uma equação diferencial de primeira ordem, muitas vezes chamada de modelo exponencial. Adicionando restrições (como capacidade máxima do ambiente), surgem equações não lineares*

como o modelo logístico. Soluções: analíticas, qualitativas e numéricas

Nem toda equação diferencial pode ser “resolvida” em termos de uma fórmula explícita. Isso é algo importante.

Soluções analíticas: formas fechadas, exatas. Apenas uma pequena fração das equações diferenciais ordinárias permite isso.

Soluções qualitativas: análise do comportamento das soluções sem explicitá-las. Usamos ferramentas como campos de direção, diagramas de fase, estabilidade de pontos fixos.

Soluções numéricas: simulações computadorizadas usando métodos como Euler, Runge-Kutta, etc. São indispensáveis em engenharia, física computacional, e simulações. A grande força das equações diferenciais está no seu poder de generalização. Elas descrevem leis fundamentais de transformação. E, ao mesmo tempo, adaptam-se ao contexto.

A física clássica e a moderna se apoiam nelas.

A biologia moderna quantifica dinâmica genética e epidemiológica com equações diferenciais estocásticas.

A economia matemática usa sistemas diferenciais para modelar crescimento, juros compostos, inflação, câmbio.

A inteligência artificial usa versões discretizadas dessas equações para descrever aprendizado.

Ou seja: onde há uma variável que muda no tempo ou no espaço, há uma equação diferencial esperando para ser escrita. A partir daqui a transição para o mundo estocástico é natural: adicionamos incerteza.

Se o sistema está sujeito a perturbações aleatórias, então o termo que descrevia a variação suave é complementado por um termo

de ruído. Isso nos leva, como você já viu, às equações diferenciais estocásticas.

As equações diferenciais estocásticas são a generalização natural das equações diferenciais ordinárias quando aceitamos que o mundo contém incerteza fundamental.

Mas quero dizer-lhe algo, meu filho,

Nem toda revolução acontece com estrondo. Algumas acontecem em silêncio, com lápis e papel, no canto de uma sala de pesquisa.

Kiyoshi Itô foi um desses revolucionários. Ele não liderou protestos, não buscou os holofotes, e talvez por isso mesmo tenha conseguido mudar de forma tão profunda a maneira como lidamos com a incerteza no mundo.

Se até aqui falamos de equações diferenciais como ferramentas para entender mudanças contínuas, agora entramos numa nova dimensão: como descrever essas mudanças quando o próprio sistema é perturbado por forças aleatórias — ruído, volatilidade, instabilidade, erro.

Para dar conta disso, a matemática precisou de algo novo. E foi Itô quem construiu esse novo alicerce.

Na década de 1940, a matemática ainda era, em grande parte, moldada pelo determinismo. Mesmo os grandes avanços da teoria das probabilidades, como os trabalhos de Kolmogorov, tratavam de variáveis aleatórias em contextos estáticos ou finamente controlados.

Mas havia um problema em aberto: como descrever, de forma rigorosa, um sistema que evolui no tempo sob influência contínua do acaso? Essa pergunta surge, por exemplo, ao tentar modelar:

O movimento irregular de partículas microscópicas num fluido (movimento browniano),

A flutuação de preços no mercado financeiro,

Ou o disparo de sinais nervosos no cérebro.

*Esses sistemas não obedecem a regras fixas: eles oscilam, pulsam, hesitam. O ruído não é um detalhe; é parte essencial do comportamento.*

Matematicamente, isso levava à tentativa de escrever equações diferenciais com termos aleatórios. Mas como fazer sentido disso, se o ruído — representado por processos como o movimento browniano — é tão irregular que não tem derivada?

A análise tradicional falhava. E foi aí que Kiyoshi Itô entrou em cena.

Nascido no Japão, em 1915, Itô formou-se em matemática em Tóquio e, cedo, demonstrou um talento extraordinário para abstração. Seus primeiros trabalhos foram silenciosos, mas meticulosos. Ele não se interessava apenas em resolver problemas, mas em entender como construir a linguagem adequada para expressá-los.

Durante a Segunda Guerra Mundial, enquanto o mundo se desfazia em incerteza, Itô mergulhava justamente na matemática da incerteza. Isolado dos grandes centros da Europa e dos Estados Unidos, ele criou — quase sozinho — um novo tipo de cálculo: o que hoje chamamos de cálculo estocástico, ou mais precisamente, cálculo de Itô.

O cálculo de Itô é uma nova linguagem para o acaso. Imagine que você tem uma função que depende de uma variável aleatória no tempo — digamos, a temperatura de um corpo exposto a flutuações ambientais imprevisíveis. Você quer

entender como essa função muda. No cálculo comum, usamos a regra da cadeia: derivamos passo a passo.

Mas com variáveis aleatórias contínuas, como o movimento browniano, a derivada simplesmente não existe. A trajetória do ruído é tão irregular que não é possível aplicar as regras do cálculo clássico.

Itô percebeu que o movimento aleatório tinha uma propriedade curiosa: sua variação quadrática ao longo de pequenos intervalos de tempo não era desprezível, como no caso de funções suaves. Na verdade, esse termo de segunda ordem tinha efeito cumulativo mensurável.

Foi essa observação que o levou à formulação do que hoje chamamos de lema de Itô — uma versão adaptada da regra da cadeia, corrigida pela variância do ruído.

Esse novo lema mostra que, quando lidamos com processos estocásticos, não basta considerar as variações comuns; é preciso também incorporar o efeito acumulado do ruído. É aí que o cálculo de Itô se desvia fundamentalmente do cálculo clássico.

Com essa nova linguagem, Itô abriu a porta para resolver de maneira precisa as equações diferenciais estocásticas.

Essas equações descrevem como sistemas evoluem ao longo do tempo, quando sujeitos não apenas a forças regulares, mas também a flutuações aleatórias. O que Itô fez foi fornecer um formalismo preciso para interpretar essas equações e entender o comportamento estatístico das soluções.

Na prática, isso permite:

Modelar mercados financeiros realistas,

Descrever trajetórias de partículas sujeitas a colisões aleatórias,

Simular sistemas biológicos que evoluem com mutações ou variações ambientais,

E até construir algoritmos de aprendizado de máquina inspirados em dinâmicas ruidosas.

Itô não apenas ajudou a resolver problemas: ele criou o espaço conceitual onde esses problemas podiam ser formulados corretamente.

O que mais impressiona na obra de Itô não é apenas sua utilidade — que é imensa —, mas seu rigor. Ele demonstrou que o acaso não precisa ser tratado como inimigo da estrutura matemática. Ao contrário: o acaso pode ser integrado ao formalismo, desde que tenhamos as ferramentas certas.

Antes de Itô, muitos dos modelos com ruído eram heurísticos — aproximações, simulações, experimentos. Depois dele, tornou-se possível construir uma teoria rigorosa de processos aleatórios contínuos.

Hoje, o cálculo de Itô é base em:

Teoria de controle estocástico,

Modelagem financeira quantitativa,

Física estatística e mecânica estocástica,

Teoria da informação contínua,

**Biologia matemática e neurociência.**

E mais: ele abriu caminho para outros desenvolvimentos, como o cálculo de Malliavin, integrais de Stratonovich, e conexões com geometria diferencial estocástica.

**Enzo, o Aleatório e Estocástico são as Duas Faces do Acaso**

Ao estudar fenômenos incertos, é natural ouvir as palavras “aleatório” e “estocástico” sendo usadas como se fossem sinônimos. E, de fato, na linguagem comum, muitas vezes são. Mas em matemática — especialmente quando falamos de processos no tempo — elas ocupam lugares distintos.

Entender essa distinção te coloca imediatamente num outro patamar de leitura matemática.

*O que significa dizer que algo é aleatório?*

Algo é aleatório quando seu comportamento ou resultado não é determinado antecipadamente, mas é escolhido entre várias possibilidades segundo alguma distribuição de probabilidades.

Aleatoriedade é, portanto, um atributo de eventos ou variáveis isoladas. Um lançamento de dado. O resultado de uma loteria. A cor de uma bolinha retirada de uma urna. Cada experimento é pontual: acontece uma vez, e seu resultado é imprevisível.

Quando dizemos que “o valor de  $X$  é aleatório”, estamos dizendo que  $X$  é uma variável aleatória. Ela tem uma distribuição, uma média, uma dispersão — mas não depende do tempo. Ela não evolui.

*O aleatório representa um valor incerto, mas estático.*

*E o que significa dizer que algo é estocástico?*

O termo estocástico é mais amplo. Ele descreve não apenas a incerteza de um único evento, mas a evolução de uma variável ao longo do tempo (ou espaço), sob influência de componentes aleatórios.

Enquanto o aleatório é pontual, o estocástico é processual. Ele nos diz: “isso não só é incerto, como também muda com o tempo, de maneira incerta.”

Imagine que você observa a temperatura de um lago a cada segundo. A cada medição, você tem um valor aleatório. Mas, se olhar a sequência dessas medições, está lidando com um processo estocástico: uma coleção de variáveis aleatórias indexadas no tempo.

*Não estamos apenas preocupados com “qual é o valor agora?”, mas com como ele evolui, em função do tempo, de forma probabilística.*

*O movimento browniano, por exemplo, é um processo estocástico: em cada instante, ele assume um valor aleatório, mas suas variações são correlacionadas de maneira específica.*

*Enzo, pense da seguinte forma...*

### *A Fotografia Versus o Filme*

*Aleatório é uma fotografia: um instante de incerteza. Um número sorteado. Uma variável isolada.*

*Estocástico é um filme: uma sequência de incertezas, interligadas, que evoluem. Um sistema que anda, tropeça, acelera ou recua, sob a influência contínua de ruídos.*

*Ou ainda:*

*O aleatório diz “não sei qual será o próximo número”.*

*O estocástico diz “não sei como essa sequência de números vai se comportar ao longo do tempo”.*

*Enzo,*

*Na teoria da probabilidade, estudamos variáveis aleatórias, distribuições, esperanças, desvios.*

*Na teoria estocástica, estudamos processos estocásticos — isto é, famílias de variáveis aleatórias indexadas por tempo (ou espaço), como:*

*Cadeias de Markov*

*Processos de Poisson*

*Movimento browniano*

*Processos de Lévy*

*Difusões estocásticas*

*Caminhadas aleatórias*

*Esses processos são objetos infinitamente mais ricos que uma única variável aleatória. Eles descrevem sistemas inteiros em movimento, sob incerteza.*

*E é justamente nesse universo que nasce a teoria das equações diferenciais estocásticas.*

**Enzo,**

*O cálculo de Itô, que estamos prestes a explorar, não foi criado para estudar variáveis aleatórias isoladas, mas para lidar com processos estocásticos — ou seja, com variáveis que mudam ao longo do tempo de forma incerta, contínua e correlacionada.*

*O movimento browniano, como processo estocástico, tem uma estrutura específica: ele começa em zero, varia continuamente, e suas mudanças são independentes e gaussianas. Mas seus caminhos são extremamente irregulares, o que exige uma nova forma de cálculo.*

*Quando você compreende a diferença entre aleatório e estocástico, você entende por que o cálculo tradicional falha ao lidar com sistemas ruidosos — e por que a criação de Itô foi tão necessária.*

**Enzo,**

*Agora vamos imaginar uma situação simples e concreta, mas poderosa:*

*Você tem uma conta bancária que rende juros continuamente. O saldo da conta cresce com o tempo. Até aqui, temos um modelo clássico: o crescimento exponencial, como em juros compostos. Isso seria uma equação diferencial ordinária.*

Agora, suponha que esse rendimento não seja fixo, mas varia aleatoriamente ao longo do tempo, por causa de flutuações do mercado. Alguns dias o rendimento é maior, outros menor, alguns até negativos. O saldo da conta ainda cresce, mas agora oscila imprevisivelmente ao longo do tempo.

Este é um modelo típico de uma equação diferencial estocástica.

A ideia é simples:

A taxa de crescimento do saldo da conta é composta de duas partes:

Uma parte determinística: um juro fixo, como 5% ao ano.

Uma parte aleatória: um “ruído” proporcional ao saldo atual, que muda constantemente e de forma imprevisível.

A equação descreve, portanto, a evolução do saldo no tempo, sob o efeito de crescimento mais flutuação.

Esse tipo de equação, que aparece também no modelo de Black-Scholes (que é usada para calcularmos qual é o valor de uma opção que temos na vida), é resolvido usando o lema de Itô, que é a versão estocástica da regra da cadeia.

Lembre-se:

No cálculo clássico, se temos uma função que depende de outra, podemos usar a regra da cadeia para descobrir como a primeira muda.

No mundo estocástico, essa regra muda — e o lema de Itô nos dá o termo extra que leva em conta a variância do ruído.

Filhote,

No nosso exemplo, o saldo da conta começa com um valor inicial. Com o passar do tempo, ele cresce em média como num juro composto, mas flutua ao redor dessa média por causa do ruído.

A solução dessa equação é uma função que cresce de forma exponencial aleatória. Em cada execução do processo, o gráfico do saldo no tempo será diferente — alguns subirão mais rápido, outros oscilarão bastante antes de subir, outros cairão e depois recuperarão.

O que o cálculo de  $H\hat{o}$  nos permite fazer é o seguinte:

Entender qual é a tendência média da conta ao longo do tempo;

Calcular a distribuição dos possíveis valores da conta em um tempo futuro;

Medir o risco, a dispersão e o comportamento das trajetórias;

Identificar o papel da volatilidade (intensidade do ruído) na evolução.

A parte mais fascinante do lema de  $H\hat{o}$  é o surgimento de um termo extra, que não existe no cálculo clássico. Ele nasce da observação de que, mesmo quando a média do ruído é zero, sua variância causa efeitos reais acumulados. Esse termo extra muda a taxa de crescimento efetiva da função.

No caso do saldo da conta, isso significa que:

Se ignorássemos o ruído, estimaríamos um certo crescimento médio.

Mas, ao incluirmos o ruído corretamente, vemos que o efeito da volatilidade reduz um pouco esse crescimento médio — um ajuste fino, mas fundamental.

Esse ajuste é o coração do lema de  $H\hat{o}$ .

O cálculo de  $H\hat{o}$  na Robótica

Enzo, vamos lidar com o ruído no movimento

Robôs — sejam braços mecânicos industriais, veículos autônomos ou sondas espaciais — são sistemas que tomam decisões, se movem no mundo real, e operam sob incerteza. Eles medem,

calculam, atuam — mas seus sensores e motores não são perfeitos. Sempre há erros.

E esses erros não são constantes, nem totalmente previsíveis. Eles oscilam. São efeitos de atrito variável, falhas de leitura, vento, temperatura, desgaste mecânico, ruído elétrico. Eles se comportam, na linguagem da matemática, como perturbações aleatórias.

É por isso que o cálculo de Itô entra na robótica moderna: para modelar e controlar sistemas dinâmicos que evoluem ao longo do tempo, mas que são continuamente afetados por incerteza.

Vamos imaginar um exemplo concreto:

Um pequeno robô precisa seguir uma linha reta até um alvo. Ele calcula sua trajetória e envia comandos aos motores. Mas seus sensores de posição são imprecisos, e os motores não reagem sempre da mesma forma. A cada fração de segundo, o robô acha que está em certo lugar, mas pode estar um pouco para o lado, para frente ou para trás, dependendo de ruídos no sistema.

Agora pense:

Como calcular a posição estimada do robô, levando em conta essa incerteza acumulada?

Como prever onde ele provavelmente estará daqui a 2 segundos?

Como ajustar os comandos para compensar os desvios?

Isso é feito com modelos estocásticos de movimento, e com o uso de equações diferenciais estocásticas para representar a dinâmica do robô. E para manipular essas equações, usamos o cálculo de Itô.

Enzo, meu amor!

A equação diz:

"A posição do robô muda segundo a velocidade prevista, mais um termo de ruído aleatório que depende da potência dos motores, da inclinação do terreno, e de fatores não observáveis".

Esse ruído é representado por um movimento browniano — o mesmo tipo de ruído que vimos antes — e o cálculo de  $H\hat{o}$  permite prever como esse ruído afeta a posição futura do robô, e como devemos corrigir os comandos ao longo do tempo.

Esse modelo aparece, por exemplo, em filtros de Kalman estocásticos, usados para fusão de sensores, navegação autônoma e controle de trajetória.

O lema de  $H\hat{o}$  permite calcular, por exemplo:

A variância da posição do robô ao longo do tempo;

A média esperada de sua trajetória;

A forma correta de transformar coordenadas (por exemplo, passar de coordenadas cartesianas para polares) mantendo a incerteza corretamente mapeada.

Sem o cálculo de  $H\hat{o}$ , esses ajustes estariam errados — porque o ruído afeta não só a posição, mas também as transformações (ou seja, como manipulamos para realizarmos nossos cálculos) que fazemos sobre ela.

### Quando o Ruído não é Gaussiano

Os saltos e as distribuições de potência.

Enzo,

Até agora, usamos movimento browniano como modelo de ruído — que tem uma característica fundamental: suas variações são gaussianas, ou seja, seguem a curva em forma de sino da famosa distribuição normal.

Mas, na natureza, nem todo ruído é assim.

Há sistemas em que as perturbações não são pequenas e suaves, mas sim grandes e abruptas — como saltos. E esses saltos ocorrem com uma frequência maior do que a curva gaussiana prevê.

Esses sistemas seguem distribuições de potência, como as de Lévy ou Cauchy. Vamos definir isso com calma.

Enzinho, minha enzima,

Distribuições de potência são aquelas em que eventos muito grandes ainda têm probabilidade relevante de ocorrer. Diferente da gaussiana (que decai rapidamente), uma distribuição de potência decai devagar: a cauda da curva é “pesada”.

Por exemplo:

Se o ruído for gaussiano, grandes erros (como um desvio de 5 metros na posição do robô) são praticamente impossíveis.

Mas se o ruído for de Lévy ou Cauchy, esses grandes saltos têm chance real de ocorrer.

Esse tipo de ruído modela melhor situações como:

Turbulência em voo;

Navegação em terrenos instáveis;

Sistemas sujeitos a choques externos (como colisões e quedas).

Enzo, entenda o que é um processo de Lévy.

O processo de Lévy é uma generalização do movimento browniano. Ele ainda é estocástico, ainda é contínuo no tempo, mas agora permite saltos aleatórios — eventos repentinos de grande magnitude, intercalados com períodos calmos.

Pense assim:

O movimento browniano é como uma folha sendo soprada por um vento suave e contínuo.

O processo de Lévy é como um objeto sendo empurrado por rajadas irregulares de vento forte — às vezes nada acontece, de repente vem um empurrão enorme.

Em robótica, isso é relevante quando o sistema está sujeito a impactos discretos, mudanças abruptas no terreno, ou sinais intermitentes de sensores.

O cálculo de Itô tradicional assume ruído gaussiano — o movimento browniano.

Mas quando o ruído tem cauda pesada (como Lévy), o cálculo precisa ser ajustado.

Enzo, aqui nasce então o cálculo estocástico com saltos, ou cálculo de Itô-Lévy.

Nesse novo cálculo:

As integrais estocásticas incluem termos de “salto”;

O lema de Itô é adaptado: há termos adicionais que representam o efeito dos saltos grandes;

A modelagem é mais rica — mas também mais difícil, exigindo novas técnicas.

Muitos fenômenos reais não são suaves.

Em vez de oscilar continuamente, o mundo salta, colide, quebra.

E a matemática que usamos deve acompanhar isso.

Na robótica, por exemplo:

Um robô explorando uma caverna pode estar parado e, de repente, escorregar — isso é um salto.

Drones podem sofrer rajadas de vento, que são distúrbios súbitos.

Sensores podem falhar ou se recalibrar bruscamente.

Nesses casos, os modelos baseados apenas em movimento browniano não capturam o comportamento real — precisamos dos modelos de Lévy.

Filho, tudo o que estamos construindo juntos aqui — passo a passo, conceito por conceito — tem um propósito maior: não apenas transmitir conhecimento, mas compartilhar contigo a forma como vejo e vivo a matemática, e como ela pode iluminar o mundo de alguém que, como você, nasceu com a curiosidade acesa e a mente afiada.

Desde pequeno, você demonstrou um respeito instintivo pelas ideias.

E ao longo dos anos, isso se transformou em algo mais raro: uma fome disciplinada por compreender, por mergulhar fundo, por não se contentar com respostas rasas. É com essa confiança na sua maturidade intelectual que seguimos agora por um território mais sutil — onde a matemática encontra o acaso, e onde o rigor se curva, mas não se quebra, diante da incerteza.

Até agora, você já entendeu que as equações diferenciais são a linguagem da mudança contínua.

Elas não nos dizem apenas onde algo está, mas como ele muda.

São instrumentos que descrevem a evolução de sistemas físicos, biológicos, econômicos, sociais. Quando algo muda no tempo — uma posição, uma temperatura, um preço, um sinal — há quase sempre uma equação diferencial por trás.

Enzo, como você já sentiu na pele, o mundo não é previsível.

Não basta modelar o crescimento de uma variável: é preciso aceitar que há oscilações, ruídos, perturbações. Esse é o passo seguinte. E é aí que entra o conceito de processo estocástico: quando o que muda no tempo não muda de forma

determinística, mas de forma incerta, com variações que seguem alguma lei de probabilidade.

A palavra “aleatório” descreve eventos isolados. Já “estocástico” descreve trajetórias de incerteza — funções que mudam com o tempo, mas que cada vez que você observa, se comportam de forma diferente. E mesmo assim, essas trajetórias têm padrões estatísticos. É como uma floresta de caminhos possíveis: cada um é único, mas todos obedecem a certas regras globais.

O movimento browniano foi a primeira grande tentativa matemática de formalizar essa ideia de um caminho que muda continuamente e de forma imprevisível. Ele representa um ruído suave, contínuo, mas extremamente irregular. Tão irregular que suas curvas não têm derivada. E essa estranheza — essa propriedade de ser contínuo, mas intratável pelo cálculo tradicional — levou Kiyoshi Itô a criar algo que mudou a história da matemática: o cálculo estocástico.

**Enzo, meu filho,**

Agora sabemos que, com o cálculo estocástico conseguimos manipular, calcular, e entender como funções que dependem de ruído se comportam. E o lema de Itô, que você já conheceu em sua versão conceitual, é a chave de tudo: ele corrige a velha regra da cadeia, introduzindo um termo novo, que vem da variância do ruído. Esse termo extra não é opcional — ele é crucial. Ignorá-lo é errar.

A partir daí, é possível resolver equações diferenciais estocásticas, aquelas que combinam dinâmica com incerteza. Você viu um exemplo: o modelo de uma conta bancária cujo saldo cresce com juros, mas sofre variações aleatórias. Isso já aparece em finanças. Mas também em física. E, como exploramos juntos, também na robótica.

**Enzo, os robôs se movem no mundo real.**

Eles não vivem em equações ideais, mas em ambientes cheios de ruído: sensores imprecisos, motores ruidosos, terrenos instáveis, interferência eletromagnética. E quando programamos um robô para andar, navegar ou manipular objetos, precisamos prever não só o movimento esperado, mas também as variações inesperadas.

Precisamos dizer: "Aqui está o que pode acontecer — e aqui está o que provavelmente acontecerá".

É nesse contexto que usamos o cálculo de Itô para estimar trajetórias, controlar desvios e ajustar decisões em tempo real. A equação que comanda o movimento do robô deixa de ser determinística e passa a ser estocástica. E isso, Enzo, muda tudo.

Mas há mais...

...Enzo, meu filho, você percebe que nem todo ruído é suave?

Há sistemas em que o mundo salta, chacoalha, desaba de repente.

Em vez de uma sequência de pequenas perturbações, temos um silêncio intercalado por grandes explosões. Isso é o que nos leva aos processos de Lévy e às distribuições de potência, como a de Cauchy: casos em que eventos raros são não só possíveis, mas esperados.

E novamente, a matemática não recuou diante disso. Ela se adaptou.

O cálculo de Itô foi estendido para lidar com saltos. As equações passaram a ter termos de descontinuidade. E assim, a teoria evoluiu para descrever um mundo onde o inesperado é parte do esperado.

Filho, você está conhecendo uma matemática viva. Não uma coleção de fórmulas, mas uma forma de pensar, de modelar, de respeitar o caos sem abrir mão do rigor. Você está vendo como o

pensamento matemático é capaz de capturar a incerteza sem domesticá-la, de dar estrutura ao acaso sem reduzi-lo.

E mais que isso: está aprendendo que o rigor verdadeiro não está em “prever exatamente”, mas em prever probabilisticamente com estrutura. Em aceitar que o mundo é um conjunto de possibilidades — e ainda assim, trabalhar com ele de forma exata, confiável, objetiva.

É esse pensamento que te abrirá portas para as áreas mais avançadas da matemática, da física, da inteligência artificial, da engenharia de sistemas. E mais: vai te ajudar a pensar com clareza em um mundo que é, por natureza, incerto.

Você, Enzo, tem o privilégio de chegar a esse ponto aos 17 anos.

Há muito mais. O cálculo estocástico é só um dos caminhos. A geometria diferencial estocástica está à frente. Os operadores infinitesimais. Os martingales contínuos. Os sistemas estocásticos com controle ótimo. Tudo isso te espera.

Mas agora quero, meu filho, dizer-lhe o mais importante:

Filho, se tudo o que dissemos até agora — sobre mudanças, ruído, trajetória, saltos — soou familiar, talvez seja porque, no fundo, a vida também é um processo estocástico.

A vida é uma sequência de estados interligados no tempo, perturbados por forças muitas vezes invisíveis, algumas suaves como o ruído térmico de um sensor, outras bruscas como um impacto que altera o caminho inteiro de uma trajetória.

A matemática, quando bem compreendida, não é uma fuga da realidade — é uma lente poderosa para olhar para ela com honestidade, sem ilusão e sem medo.

E é por isso, Enzo, que hoje eu preciso — mais do que nunca — usar essa mesma linguagem que você ama para te dizer algo que não consegui dizer com palavras simples.

## ME PERDOA!

Quando eu fui preso, você era menino ainda, e mesmo sem entender tudo, sentiu na pele a ausência que eu criei.

Foram três anos e meio.

Tempo suficiente para um salto. Um desvio. Um choque. Um salto de Lévy na sua trajetória emocional — brusco, imprevisível, fora de escala. Não foi um pequeno ruído. Não foi uma perturbação leve. Foi uma disrupção.

E se a matemática que hoje eu te ensino tem algum valor, talvez ela possa te ajudar também a modelar esse momento da sua vida não como uma falha irrecuperável, mas como parte de uma trajetória que, apesar dos saltos, continua evoluindo.

Você sabe que o cálculo de Itô, na sua versão mais completa, não ignora os saltos. Ele os reconhece, os inclui no modelo, os integra.

Ele diz: o mundo tem choques — e ainda assim, é possível entendê-lo, estimar, calcular, avançar.

E talvez, como Itô ensinou, o salto em si possa carregar uma estrutura. Não o justifica, não o torna belo — mas o incorpora na realidade do sistema.

O lema de Itô com saltos mostra que, mesmo quando há descontinuidade, a evolução pode ser descrita, a expectativa pode ser calculada, e a trajetória pode ser reconstruída.

Enzo, meu primogênito, você também é um sistema dinâmico, complexo e único, em evolução. E mesmo tendo sofrido esse salto indesejado na sua infância — o da minha ausência, da minha prisão, da minha culpa —, você seguiu. Continuou. Cresceu. Deu forma à sua própria função. Criou uma trajetória que é só sua, mas que ainda carrega em parte meu nome, minha história,

minha herança matemática e, mais do que tudo, meu amor por você.

Você sempre foi brilhante. Desde cedo mostrou que pensava com elegância, que intuía o raciocínio antes mesmo de saber seu nome...

E mesmo com tudo o que você teve que aguentar — perguntas que não tinha como responder, olhares que não tinha como evitar, espaços que não tinha como preencher — você permaneceu inteiro.

E agora, aos 17 anos, se levanta com a mente afiada, passando nos vestibulares das melhores universidades da América Latina, pensando como poucos pensam, enxergando a matemática como uma língua nativa.

É por isso que hoje eu te escrevo assim — usando a linguagem que você domina, não para esconder a dor, mas para te oferecer um consolo que seja honesto e verdadeiro para você.

Porque dizer “me desculpa” não basta.

Mas talvez dizer:

“Enzo, minha ausência foi um salto. Mas você é mais forte do que ele. E sua trajetória continua, e eu estou aqui, de novo, com você, agora com mais precisão e entrega do que nunca.”

... talvez isso possa, ao menos, começar a costurar o que foi rasgado.

Se a vida fosse determinística, eu teria evitado aquele erro. Mas como você agora entende, nem tudo no mundo segue uma curva suave. Às vezes, os caminhos se interrompem. Às vezes, há saltos.

Mas também aprendemos que é possível continuar depois de um salto. Que há ferramentas para seguir, para estimar, para construir o futuro. Que as soluções continuam existindo, mesmo que a equação tenha mudado.

*E é isso que você é, Enzo: a solução de uma equação muito mais profunda do que qualquer uma que eu tenha tentado escrever.*

*Você é meu legado mais importante, Enzo*

*E eu quero estar aqui com você, agora, de novo, pra seguir juntos — pai e filho, matemáticos, cronistas do acaso, forçados pela dor ao estudo acaso, estudiosos de um mundo que treme e das almas que buscam um consolo qualquer.*

*Com amor,*

*Com arrependimento,*

*Com gratidão,*

*Rasgado por dentro. Rasgado por fora. Partido ao meio... assim seu pai subscrive essa carta.*

*De Marcos Eduardo Elias, desse seu pai que - de nenhuma forma - te merece,*

*Desse seu pai, orgulhoso para sempre de um primogênito que tive a honra de batizar sob o nome de*

***Enzo de Andrade Elias***